

# Diseño, modelado y construcción de la dirección de un vehículo tipo SAE mediante análisis vectoriales y geométricos

Design, modeling and construction of the steering of a type SAE vehicle through vector and geometric analysis

MARCO AURELIO MOYA-QUEVEDO<sup>1</sup>, FRANCISCO ROSAS-PÉREZ<sup>1,3</sup>, IGNACIO DE LUNA-ZAMORA<sup>1</sup>, RAÚL ARMANDO SALAS-MOTIS<sup>1</sup>, ANA GABRIELA FRANCO-DÍAZ<sup>2</sup> Y GILDARDO ROSAS-PÉREZ<sup>1</sup>

*Recibido: Noviembre 8, 2018*

*Aceptado: Junio 6, 2019*

## Resumen

El objetivo de este artículo es diseñar la geometría del sistema de dirección de un vehículo SAE (*Society of Automotive Engineers*), para poder determinar el desplazamiento que debe recorrer la cremallera y que las ruedas del vehículo giren en un ángulo previamente establecido. Se utilizan vectores de posición para representar los elementos móviles del sistema de dirección en sus dos diferentes condiciones: sin ángulo de giro y con el ángulo máximo de giro. Los elementos usados para el diseño fueron los brazos de dirección, los tirantes y la cremallera, siendo esta última representada como un vector de desplazamiento en un solo eje. Los elementos restantes fueron representados con vectores de magnitud fija, después se procedió a determinar ecuaciones utilizando un lazo cerrado del mecanismo con base en las condiciones que se establecen (máximo ángulo de giro y geometría de la dirección), finalmente, se calcula el recorrido necesario en la cremallera, con esto se obtiene el diámetro de paso final del piñón.

**Palabras clave:** SAE, Kingpin, Caster, Geometría Ackermann, sistema de dirección.

## Abstract

The objective of this paper is to design the geometry of the steering system of a SAE (*Society of Automotive Engineers*) vehicle to determine the required rack travel so the wheels turn in a previously established angle. Position vectors were used to represent the mobile elements in the steering system in both of its different conditions; without steer angle and with the maximum established steer angle. The elements used in the design were the steering arms, the tie rods and the rack, being this last one represented as a displacement vector in a single axis. The remaining elements were represented as fixed magnitude vectors, then equations were determined using a closed loop of the mechanism based on the established conditions (Maximum turn axis, steering geometry), finally the required rack travel was calculated, with this the final pitch circle of the pinion was obtained.

**Keywords:** SAE, Kingpin, Caster, Ackermann geometry, steering system.

<sup>1</sup> TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO/ INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHIHUAHUA, AV. TECNOLÓGICO # 2909, CHIHUAHUA, CHIHUAHUA MÉXICO C.P. 31310, (614) 201-2000

<sup>2</sup> TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO/ INSTITUTO TECNOLÓGICO DE DELICIAS, PASEO TECNOLÓGICO KM. 3.5 Cd. DELICIAS, CHIHUAHUA MÉXICO C.P. 33000 TEL. (639) 474-5093

<sup>3</sup> DIRECCIÓN ELECTRÓNICA DEL AUTOR DE CORRESPONDENCIA: FROSAS@ITCHIHUAHUA.EDU.MX

## Introducción

La Sociedad de Ingenieros Automotrices (*Society of Automotive Engineers, SAE*) es una organización de ingenieros, no lucrativa, conformada por más de 80,000 profesionales de diversas disciplinas de la ingeniería. Esta sociedad establece las normas que actualmente se usan en la industria automotriz, las cuales permiten hacer pruebas, mediciones, mejorar el diseño de los automóviles y sus componentes.

El Proyecto Formula SAE es una competencia de diseño para estudiantes de licenciatura y posgrado. Para los estudiantes, el evento les da la posibilidad de probar sus habilidades de ingeniería y manejo de proyectos, y aplicar los conocimientos teóricos aprendidos en el aula de clases en una competencia desafiante. El objetivo principal de esta es diseñar, modelar cada elemento, construir y competir un vehículo de carreras monoplace recreativo tomando en cuenta el diseño, la manufactura, el costo y el rendimiento.

El Instituto Tecnológico de Chihuahua empieza a participar en la competencia Formula SAE desde 1995, al ser invitado por la SAE debido al desempeño obtenido en la competencia Baja SAE.

En el vehículo Formula SAE, el sistema de dirección debe estar mecánicamente conectado a las ruedas delanteras (Society of Automotive Engineers, 2016), por lo que se utiliza el mecanismo piñón cremallera.

Un sistema de dirección con un mecanismo piñón cremallera convierte un desplazamiento lineal a un movimiento angular (Milliken y Milliken, 1995). El sistema se compone de la cremallera, conectada a los tirantes y estos a su vez se unen a los brazos de dirección, de esta forma se controla el ángulo de giro (Gillespie, 1992). Al establecer los ángulos de giro deseados en las ruedas, se procede a calcular el desplazamiento de la cremallera y, finalmente, a la selección del diámetro del piñón.

Antes de hacer la selección del piñón, deberá analizarse la geometría de los elementos antes mencionados, primeramente de los brazos de dirección, los cuales giran alrededor del eje de las ruedas y posteriormente, en función de lo analizado en los brazos, se calcula el desplazamiento horizontal de ambos componentes para obtener la distancia que debe recorrer la cremallera y se procede a elaborar un método para realizar la selección del piñón

directamente con base en ese desplazamiento y este podrá ser utilizado para cualquier geometría de la dirección que se haya hecho con posterioridad.

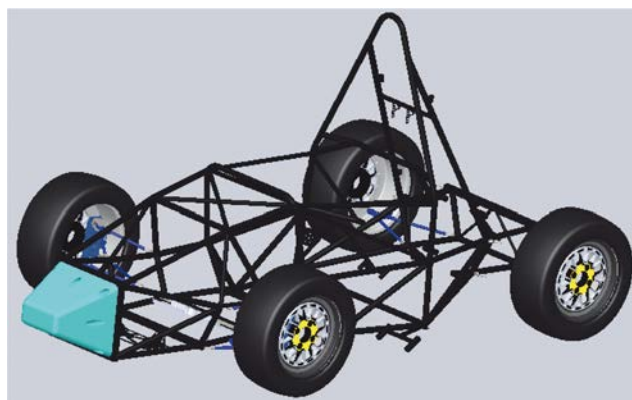
El objetivo de este artículo es diseñar la geometría del sistema de dirección de un vehículo SAE (*Society of Automotive Engineers*), para poder determinar el desplazamiento que debe recorrer la cremallera y que las ruedas del vehículo giren en un ángulo previamente establecido.

## Materiales y métodos

Se utilizan vectores de posición para representar cada uno de los elementos móviles del sistema de dirección en sus dos diferentes condiciones. Se emplea un modelo matemático para obtener su posición con base en los ángulos que caracterizan al movimiento de la rueda, seguidamente, se crea un diseño de posición a los tirantes.

A continuación se describen los diferentes factores que afectan la geometría del sistema de dirección. En la Figura 1 se muestra el prototipo PR15, al cual se le analiza el sistema de dirección para su posterior selección del piñón.

**Figura 1.** Ensamble parcial del prototipo Formula SAE 2017, nombrado PR15, con el cual se compite en el año 2017 en Lincoln, NE.



### *El ángulo de giro de las llantas y del volante*

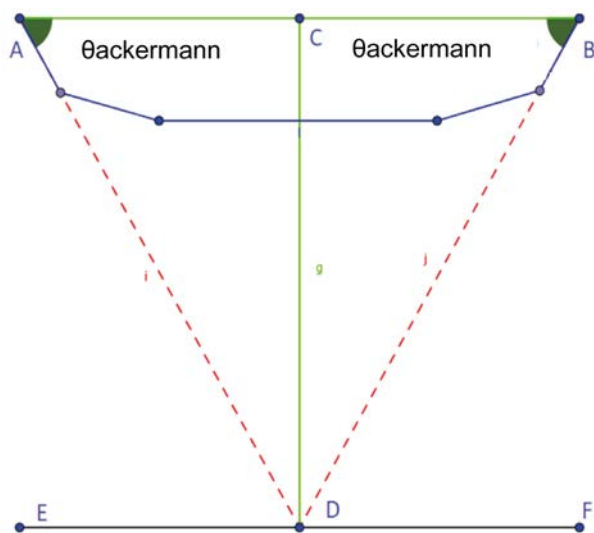
El ángulo de giro de las ruedas es el máximo que estas pueden tener sin que exista una interferencia entre sus elementos, el cual puede variar dependiendo de factores como la geometría de la suspensión y el tipo de llantas utilizadas, entre otros.

El ángulo de giro del volante deberá ser un valor muy cercano a  $90^\circ$  para el caso de los vehículos de carreras, ya que de otra forma podría generar cierta incomodidad al piloto al tomar curvas muy cerradas, o incluso este se podría ver sin la posibilidad de girar más de ese ángulo el volante.

### *Geometría Ackermann*

Este tipo de geometría, a bajas velocidades le proporciona una buena estabilidad al vehículo sin causar mucho arrastre en las ruedas (Milliken y Milliken, 1995). Su principio se basa en que cada llanta debe girar con una pendiente diferente, para esto, los brazos de dirección deben apuntar con una línea imaginaria al centro del eje trasero (Figura 2).

**Figura 2.** Geometría Ackermann, donde en azul se muestran los elementos de la dirección, en negro los ejes trasero y delantero y en líneas rojas punteadas la distancia entre ejes y las líneas imaginarias a las cuales deben estar alineados los brazos de dirección (Milliken y Milliken, 1995).



### *Los ejes de giro de las ruedas*

Las ruedas del vehículo giran sobre un eje de giro casi vertical, el cual es afectado por dos ángulos de inclinación (Caster y Kingpin) que de no tenerlos, el eje se posicionaría en el eje vertical.

El ángulo Caster es la inclinación del eje de dirección al ver la rueda en una vista lateral; el ángulo de inclinación Kingpin es la inclinación de este eje pero observada desde una vista frontal (Milliken y Milliken, 1995). Con la combinación de estos dos ángulos, resulta un eje de giro posicionado no en un plano, sino en el espacio, por lo que requiere un análisis más complejo.

Además, es necesario antes delimitar la distancia que existe entre estos dos ejes (uno para cada rueda del eje delantero), las cuales son predefinidas en el diseño de la suspensión.

### *Los brazos de dirección*

Son los elementos que transforman el movimiento lineal de la cremallera a movimiento angular en las torres, estos brazos hacen girar a la rueda y pasan por el eje de giro de esta. Los brazos de dirección funcionan como palanca y reciben el movimiento transmitido por la cremallera mediante los tirantes antes de realizar el análisis, se requiere determinar la longitud que hay entre el centro del eje de giro y el punto de pivoteo de los brazos y los tirantes.

### *La posición de la cremallera y su longitud*

Dependiendo de cada caso, la cremallera tendrá cierta longitud y un desplazamiento en el eje Z y el eje X respecto al eje horizontal en Y que se forma al unir el punto donde los brazos de dirección se unen con el eje delantero.

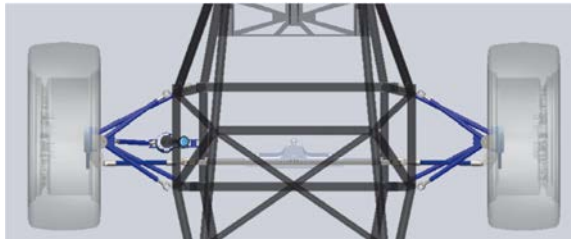
Es necesario conocer el desplazamiento en Z y en X para determinar el desplazamiento que requiere la cremallera.

### *La longitud de los tirantes*

Al establecer la longitud de la cremallera, su desplazamiento en X y Y respecto al eje que se forma entre los ejes de giro de las llantas y la longitud de los brazos de dirección, se procede a determinar la longitud de los tirantes mediante la distancia que hay entre un extremo de la cremallera y el punto de pivoteo de los brazos de dirección.

Para proceder con el análisis del sistema de dirección, el cual es ilustrado en la Figura 3, se procede a representar todo el sistema como vectores de posición.

**Figura 3.** Vista aérea del vehículo.



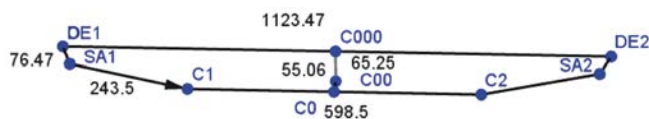
*Análisis vectorial del desplazamiento de la cremallera*

En esta sección se analiza la geometría de la dirección en su posición con ángulo cero de rotación, se analiza también la posición cuando el ángulo de rotación está en su máximo valor. Para ello se utilizan cierres vectoriales en los cuales cada vector representa algún elemento y muestran su respectivo comportamiento. En la Figura 4 se muestra el ensamble del sistema de dirección con todos sus componentes, y en la Figura 5 se muestra su representación como un esquema.

**Figura 4.** Ensamble del sistema de dirección.



**Figura 5.** Representación esquemática de la dirección.

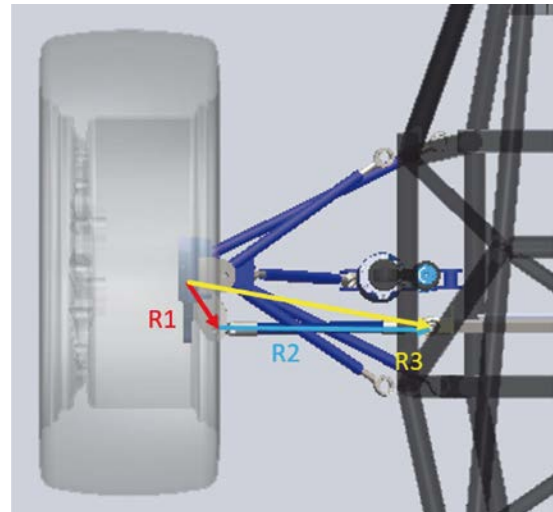


En el caso cuando el ángulo de giro es igual a cero ( $\delta_i = 0^\circ$ ) se tiene el cierre vectorial, en la Figura 6 se observa el cierre vectorial posicionado en el vehículo. En esta condición, la cremallera no presenta ningún desplazamiento axial, como se muestra en la Figura 7.

$$R1 + R2 = R3 \quad \text{Ec. (1)}$$

Cuando la cremallera es desplazada a su punto máximo, el ángulo de giro también será máximo ( $\delta_i = \theta_{\max}$ ), esto puede apreciarse en la Figura 8.

**Figura 6.** Posicionamiento de los vectores en el ensamble.



$$R1' + R2' = R3' \quad \text{Ec. (2)}$$

Siendo  $R_3$  y  $R_3'$  vectores de posición en el espacio, se tienen entonces sus coordenadas rectangulares.

$$R3 (x1, y1, z1) \quad \text{Ec. (3)}$$

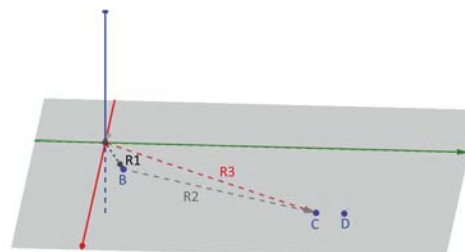
$$R3' (x2, y2, z2) \quad \text{Ec. (4)}$$

Indicando los cierres como vectores con coordenadas rectangulares se tiene que:

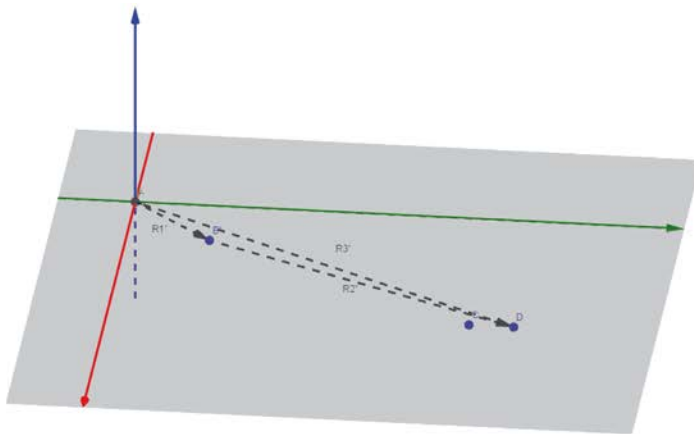
$$R1 (a1, b1, c1) + R2 (a2, b2, c2) = R3 (X1, Y1, Z1) \quad \text{Ec. (5)}$$

$$R1' (a1', b1', c1') + R2' (a2', b2', c2') = R3' (X2, Y2, Z2) \quad \text{Ec. (6)}$$

**Figura 7.** Sin ángulo de giro.



**Figura 8.** Con ángulo de giro máximo, nótese que hay un desplazamiento axial respecto de la Figura 7.



Agregando un vector de desplazamiento  $VD$  de la cremallera, con únicamente componente en  $Y$ .

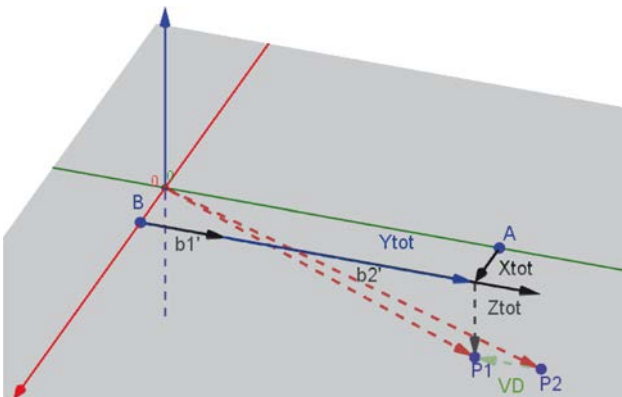
$$VD (0, Dy, 0) \quad \text{Ec. (7)}$$

$$R3 (x1, y1, z1) + VD (0, Dy, 0) = R3' (X2, Y2, Z2) \quad \text{Ec. (8)}$$

$$R3 (x1, y1, z1) + VD (0, Dy, 0) = R3' (X1, Y2 + Dy, Z1) \quad \text{Ec. (9)}$$

Este vector de desplazamiento en el eje  $Y$  ( $VD$ ), como se muestra en la Figura 9, será la distancia que tiene que moverse la cremallera de un punto a otro para que el sistema gire el ángulo máximo establecido.

**Figura 9.** El vector de desplazamiento en  $Y$  (en verde), muestra la diferencia entre los vectores que posicionan a la cremallera (en rojo, línea punteada).



Al descomponer los vectores  $R3$  y  $R3'$  en sus componentes rectangulares se obtiene lo siguiente:

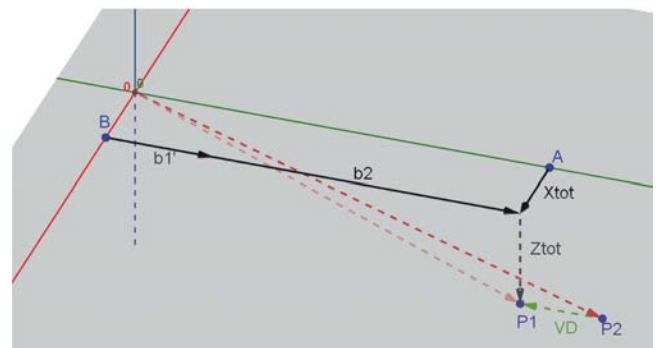
$$X1 = a1 + a2 \quad \text{Ec. (10);} \quad Y1 = b1 + b2 \quad \text{Ec. (11)}$$

$$Z1 = c1 + c2 \quad \text{Ec. (12);} \quad X2 = a1' + a2' \quad \text{Ec. (13)}$$

$$Y2 = b1' + b2' \quad \text{Ec. (14);} \quad Z2 = c1' + c2' \quad \text{Ec. (15)}$$

En la Figura 10, se muestran los componentes rectangulares que conforman a  $R3$ , mientras que en la Figura 11 se muestran los componentes rectangulares de  $R3'$ .

**Figura 10.** Componentes rectangulares de  $R3$  (en negro).



Al comparar  $R3$  con  $R3'$  por medio de sus componentes rectangulares como se observa en la Figura 11 se puede llegar al siguiente razonamiento:

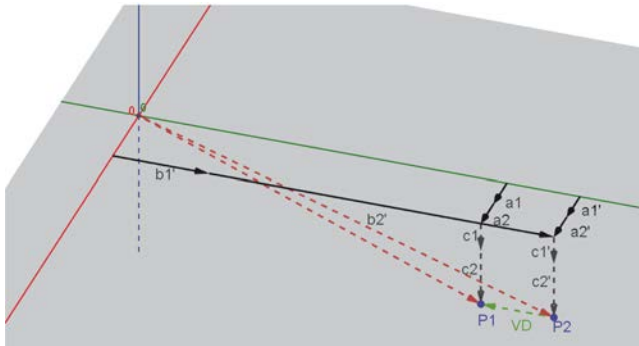
$$X1 = X2 \quad \text{Ec. (16)}$$

$$Y1 = Y2 + Dy \quad \text{Ec. (17)}$$

$$Z1 = Z2 \quad \text{Ec. (18)}$$



**Figura 11.** Componentes rectangulares de R3' con una comparación de los componentes en X y Z del vector R3, que muestra que estos son iguales en R3 y R3'.



Sustituyendo X1, Y1 y Z1 se obtiene lo siguiente.

$$a1 + a2 = a1' + a2' = X2 \quad \text{Ec. (19)}$$

$$b1 + b2 + Dy = b1' + b2' = Y2 \quad \text{Ec. (20)}$$

$$c1 + c2 = c1' + c2' = Z2 \quad \text{Ec. (21)}$$

Despejando para obtener el desplazamiento de la cremallera Dy (único componente rectangular de VD), se tiene lo siguiente:

$$b1' + b2' + Dy = b1 + b2 \quad \text{Ec. (22)}$$

$$Dy = b1 + b2 - (b1' + b2') \quad \text{Ec. (23)}$$

$$Dy = (b1 - b1') + (b2 - b2') \quad \text{Ec. (24)}$$

Por lo tanto, el desplazamiento Dy será igual a la suma de las diferencias entre los componentes rectangulares en Y de cada vector R3 y R3', renombrando de esta manera se obtendrá lo siguiente:

$$Dy = \Delta b1 + \Delta b2 \quad \text{Ec. (25)}$$

Donde  $\Delta b1$  es la diferencia de posición en Y de los brazos de dirección y  $\Delta b2$  es de los tirantes.

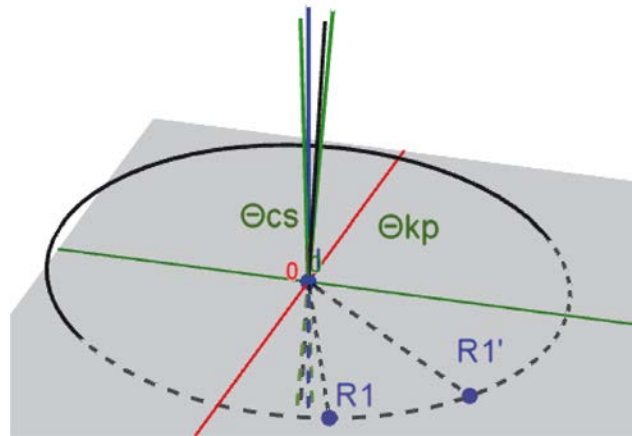
#### Análisis geométrico de los brazos de dirección

Como el eje de giro de los brazos de dirección está afectado por los ángulos Kingpin y Caster ( $\theta_{kp}$  y  $\theta_{cs}$  respectivamente) como se indica en la Figura 12, se procederá a realizar el análisis:

Para encontrar el valor de  $\Delta b1$  primero se requiere obtener los vectores de posición de  $R_1$  y  $R_1'$ , estos vectores son de una magnitud ya determinada,

la cual corresponde a la distancia entre el eje de giro y el punto de pivoteo de los brazos de dirección con los tirantes. Estos vectores además se posicionan en un plano de giro en el espacio el cual es perpendicular al eje de giro.

**Figura 12.** Posición del eje de giro de los brazos de dirección, el cual es el mismo que el eje de giro de las ruedas del vehículo.



La posición de la partícula a analizar, para este caso el punto de pivoteo de los brazos de dirección, depende de cinco factores, los cuales son:

- El ángulo Caster
- El ángulo Kingpin
- El radio del círculo, el cual está dado por la magnitud del vector R1
- El ángulo de rotación de la partícula proyectado en el plano XY
- El ángulo de los brazos de dirección debido a la geometría Ackermann

Todos estos son factores se deben determinar previamente, en caso de que faltara alguno de estos datos, no se podría conocer la posición de la partícula.

Para mayor facilidad de cálculos se utilizan coordenadas esféricas para obtener el vector de posición:

$$R1 (r, \theta_{ackermann}, 90^\circ + \alpha1) \quad \text{Ec. (26)}$$

$$R1' (r, \theta_{ackermann} - \delta_i, 90^\circ + \alpha2) \quad \text{Ec. (27)}$$

Para conocer el ángulo Ackermann, se debe conocer primero la distancia entre los ejes de giro, ya establecida, y la distancia entre este eje y el eje trasero

del vehículo, como se puede observar en la Figura 2 (distancia C-D).

Por lo tanto,  $\theta_{ackermann}$  se obtiene de la siguiente forma, al emplear la Ecuación 28:

$$\theta_{ackermann} = \tan^{-1} \frac{wheelbase}{Dg} \quad \text{Ec. (28)}$$

Donde *wheelbase* es la distancia entre los ejes trasero y delantero y *Dg* es la distancia entre los ejes de giro de las ruedas.

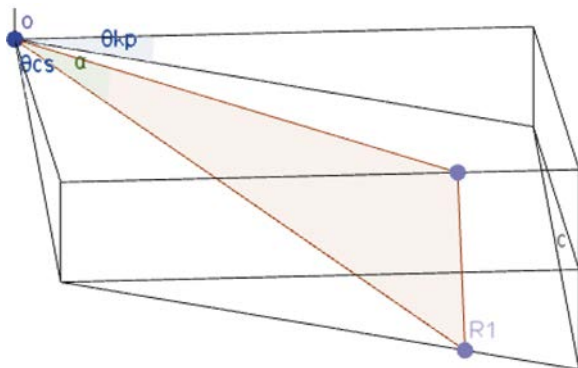
El ángulo  $\alpha$  representa el ángulo que hay entre el plano XY y el vector de posición R1, como se muestra en la Figura 14, este ángulo está en función de la resta del ángulo Ackermann ( $\theta_{ackermann}$ ) y el ángulo de rotación de la llanta ( $\delta_i$ ) y también en función de los ángulos de inclinación del eje Kingpin ( $\theta_{kp}$ ) y Caster ( $\theta_{cs}$ ).

Para dejar el ángulo  $\alpha$  en función de estos valores se utiliza el siguiente razonamiento:

Siendo  $\theta_1$  el ángulo entre la proyección del vector R1 en el plano XY y el eje Y (la suma de  $\theta_{ackermann}$  y  $\delta_i$ ), se tienen los siguientes dos casos:

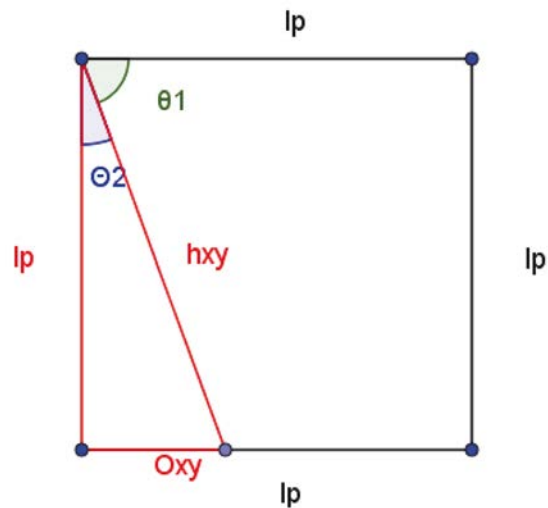
Caso 1: Para  $\theta_1$  igual o mayor a  $45^\circ$ , como es mostrado en la Figura 14, se sigue el procedimiento:

**Figura 13.** Representación del vector R1 en su plano de giro cuando  $\theta_1$  es mayor a  $45^\circ$ .



El plano XY de la representación de la Figura 13 es mostrado en la Figura 14, de este se obtiene un triángulo rectángulo para la deducción de la ecuación para obtener  $\alpha$ .

**Figura 14.** Plano XY de la representación del vector R1.

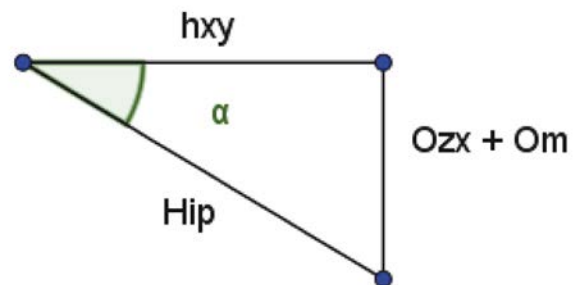


De este se obtiene lo siguiente:

$$\cos \theta_2 = \frac{lp}{hxy} \quad \text{Ec. (29)}$$

El triángulo formado por el vector y su proyección en XY se muestra en la Figura 15.

**Figura 15.** Triángulo formado por el vector R1 y la proyección de este vector en el plano XY.

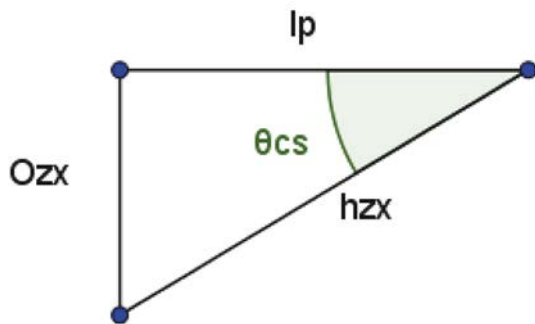


De este triángulo se obtiene lo siguiente:

$$\tan \alpha = \frac{Ozx+Om}{hxy} \quad \text{Ec. (30)}$$

El triángulo proyectado en XZ, mostrado en la Figura 16.

**Figura 16.** Triángulo proyectado en el plano XZ.

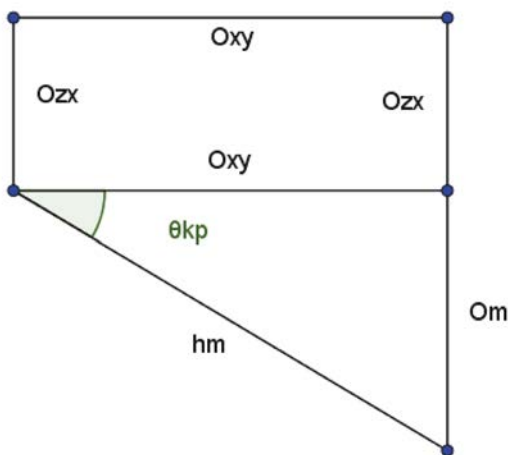


De la Figura 16 se tiene:

$$\tan \theta_{cs} = \frac{O_{zx}}{lp} \quad \text{Ec. (31)}$$

El polígono paralelo a ZY, mostrado en la Figura 17, se compone de un triángulo y un rectángulo.

**Figura 17.** Polígono paralelo al plano ZY.



Del cual se obtiene lo siguiente:

$$\tan \theta_{kp} = \frac{Om}{Oxy} \quad \text{Ec. (32)}$$

Sustituyendo todo en la ecuación obtenida triángulo del vector (Figura 15) para obtener  $\alpha$ :

$$O_{zx} = lp \tan \theta_{cs} \quad \text{Ec. (33);} \quad Om = Oxy \tan \theta_{kp} \quad \text{Ec. (34)}$$

$$Oxy = lp \tan \theta_2 \quad \text{Ec. (35);} \quad Om = lp \tan \theta_2 \tan \theta_{kp} \quad \text{Ec. (36)}$$

$$h_{xy} = \frac{lp}{\cos \theta_2} \quad \text{Ec. (37)}$$

$$\tan \alpha = \frac{lp \tan \theta_{cs} + lp \tan \theta_2 \tan \theta_{kp}}{\frac{lp}{\cos \theta_2}} \quad \text{Ec. (38)}$$

$$\tan \alpha = \frac{lp(\tan \theta_{cs} + \tan \theta_2 \tan \theta_{kp})}{\frac{lp}{\cos \theta_2}} \quad \text{Ec. (39)}$$

$$\tan \alpha = \cos \theta_2 (\tan \theta_{cs} + \tan \theta_2 \tan \theta_{kp}) \quad \text{Ec. (40)}$$

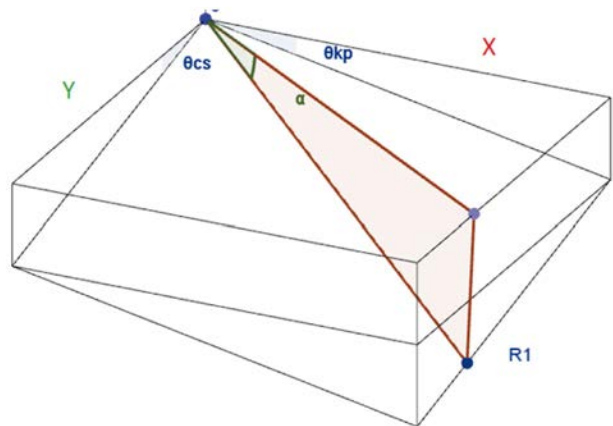
Por lo tanto, el ángulo  $\alpha$  cuando  $\theta_1$  es mayor o igual a  $45^\circ$  está dado por:

$$\alpha = \tan^{-1} [\cos \theta_2 (\tan \theta_{cs} + \tan \theta_2 \tan \theta_{kp})] \quad \text{Ec. (41)}$$

Caso 2: Para  $q_1$  menor o igual a  $45^\circ$  se seguirá el siguiente procedimiento:

En la Figura 18 se muestra la posición del vector R1 cuando el ángulo  $\theta_1$  es menor a  $45^\circ$ .

**Figura 18.** Representación del vector R1 en su plano de giro cuando  $q_1$  es menor a  $45^\circ$ .



En el plano XY (ver Figura 19), al igual que el procedimiento anterior se obtendrá la función coseno, sin embargo, en este procedimiento se trabaja con  $\theta_1$ .

De este se obtiene lo siguiente:

$$\cos \theta_1 = \frac{lp^3}{h_{xy}} \quad \text{Ec. (42)}$$

El triángulo formado por el vector y su proyección en XY se representa en la Figura 20.



Figura 19. Plano XY del vector R1.

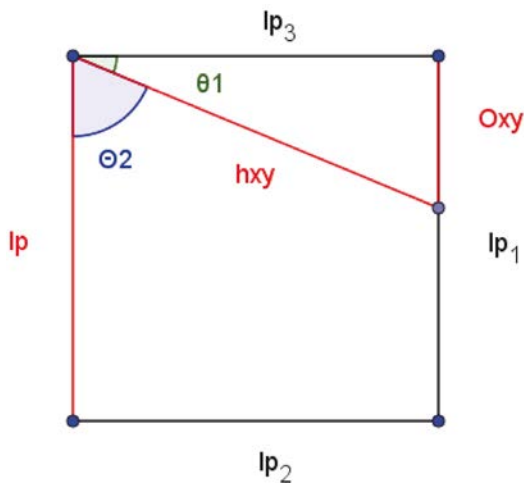
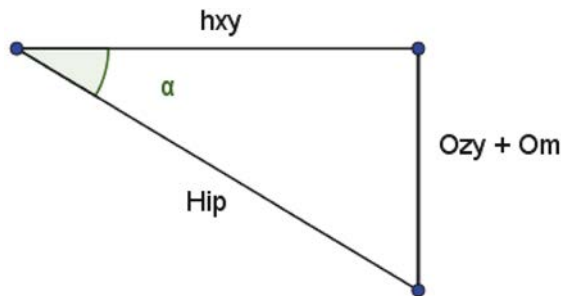


Figura 20. Triángulo formado por el vector R1 y su proyección en el plano XY.

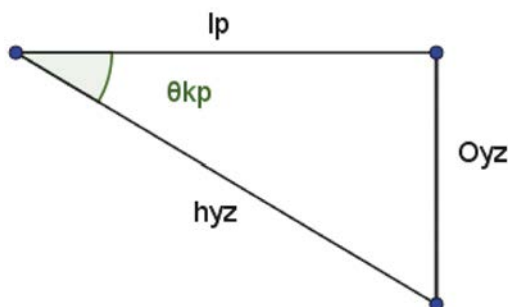


De este se despeja:

$$\alpha = \frac{Ozy + Om}{hxy} \quad \text{Ec. (43)}$$

El triángulo proyectado en ZY (Figura 21) se utiliza en lugar del proyectado en XZ como fue utilizado en el procedimiento anterior.

Figura 21. Triángulo proyectado en ZY.

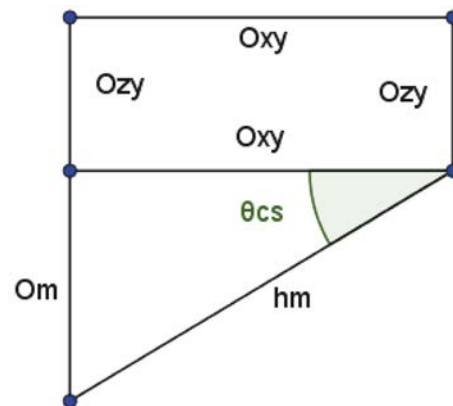


De la Figura 21 se tiene:

$$\tan \theta kp = \frac{Ozy}{lp} \quad \text{Ec. (44)}$$

El polígono paralelo a ZX (Figura 22) se utiliza en lugar del polígono paralelo a ZY.

Figura 22. Polígono paralelo a ZX.



Del cual se obtiene:

$$\tan \theta cs = \frac{Om}{Oxy} \quad \text{Ec. (45)}$$

Sustituyendo todo en la ecuación obtenida del triángulo del vector R1 para obtener  $\alpha$ :

$$Ozy = lp \tan \theta kp \quad \text{Ec. (46);} \quad Om = Oxy \tan \theta cs \quad \text{Ec. (47)}$$

$$Oxy = lp \tan \theta 1 \quad \text{Ec. (48);} \quad Om = lp \tan \theta 1 \tan \theta cs \quad \text{Ec. (49)}$$

$$hxy = \frac{lp}{\cos \theta 1} \quad \text{Ec. (50)}$$

$$\tan \alpha = \frac{lp \tan \theta kp + lp \tan \theta 1 \tan \theta cs}{\frac{lp}{\cos \theta 1}} \quad \text{Ec. (51)}$$

$$\tan \alpha = \frac{lp(\tan \theta kp + \tan \theta 1 \tan \theta cs)}{\frac{lp}{\cos \theta 1}} \quad \text{Ec. (52)}$$

$$\tan \alpha = \cos \theta 1 (\tan \theta kp + \tan \theta 1 \tan \theta cs) \quad \text{Ec. (53)}$$

Por lo tanto, el ángulo  $\alpha$  para  $\theta 1$  menor o igual a  $45^\circ$  está dado por:

$$\alpha = \tan^{-1} [\cos \theta 1 (\tan \theta kp + \tan \theta 1 \tan \theta cs)] \quad \text{Ec. (54)}$$

Las ecuaciones anteriores donde se encontró el valor de  $\alpha$ , para ambos casos se utilizan directamente para obtener los ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , dependiendo de la geometría se utiliza una ecuación o la otra, la del vector  $R_1$  o la del vector  $R_1'$  en coordenadas esféricas, respectivamente.

Una vez ya conocidos todos los valores para obtener los vectores de posición  $R_1$  y  $R_1'$  en sus coordenadas esféricas, se procede a convertirlos a coordenadas rectangulares aplicando las fórmulas de conversión (Larson y Edwards, 2010).

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta \quad \text{Ec. (55);} \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta \quad \text{Ec. (56)}$$

$$z = \rho \cos \theta \quad \text{Ec. (57)}$$

Hecho esto, se procede a obtener  $\Delta b_1$  el cual está dado por:

$$\Delta b_1 = b_1 - b_1' \quad \text{Ec. (58)}$$

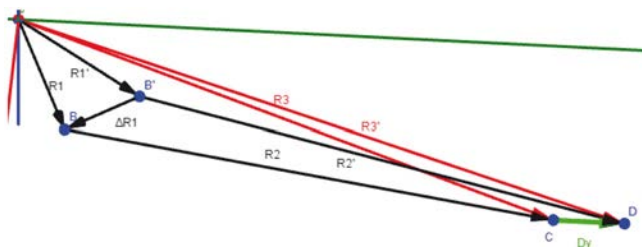
#### Análisis geométrico de los tirantes

Ya encontrados los vectores de posición de  $R_1$  y  $R_1'$ , se procede a encontrar ahora los valores de  $R_2$  y  $R_2'$  que mediante estos se puede conocer  $\Delta b_2$ .

Para encontrar  $R_2$  y  $R_2'$  se realiza el siguiente análisis:

Analizando los vectores en las dos distintas posiciones de la cremallera se tiene el esquema mostrado en la Figura 23

**Figura 23.** Análisis de posición de los vectores del sistema de dirección.

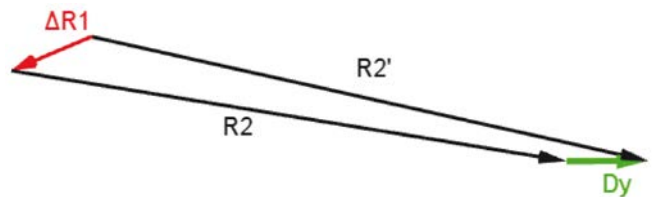


Como los vectores de posición  $R_1$  y  $R_1'$  ya son valores conocidos, entonces se pueden representar estos como un vector de diferencia, lo cual se ve en la Ecuación 59.

$$R_1 - R_1' = \Delta R_1 \quad \text{Ec. (59)}$$

Por lo tanto se puede simplificar el cierre vectorial eliminando los vectores que ya no son útiles para el análisis, como se muestra en la Figura 24, en este análisis solo se ha dejado  $\Delta R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_2'$  y  $Dy$ .

**Figura 24.** Análisis simplificado de los vectores del sistema de dirección para encontrar  $R_2$  y  $R_2'$



Del análisis vectorial simplificado se conoce lo siguiente:

$$||R_2|| = ||R_2'|| \quad \text{Ec. (60);} \quad \Delta R_1 + R_2 + Dy = R_2' \quad \text{Ec. (61)}$$

El vector  $R_2$  al ya tener  $R_1$ , podrá conocerse siguiendo:

$$R_2 (a_2, b_2, c_2) = R_3(X_1, Y_1, Z_1) - R_1 (a_1, b_1, c_1) \quad \text{Ec. (62)}$$

Para encontrar los componentes rectangulares de  $R_3$  se utilizan los desfases de la cremallera en los ejes X, Y y Z.

$$X_1 = Dcx \quad \text{Ec. (63);} \quad Y_1 = \frac{Dg+Lc}{2} \quad \text{Ec. (64);} \quad Z_1 = Dcz \quad \text{Ec. (65)}$$

Donde  $Dcx$  es el desfase de la cremallera respecto al eje que se encuentra entre los ejes de giro de las llantas,  $Dg$  es la longitud de este eje y  $Dcz$  es el desfase en Z.

Los vectores  $R_2$  y  $\Delta R_1$  son ahora conocidos, por lo tanto, descomponiendo en sus componentes rectangulares se tiene la siguiente información:

$$\Delta R_1 (\Delta a_1, \Delta b_1, \Delta c_1) \quad \text{Ec. (66);} \quad R_2 (a_2, b_2, c_2) \quad \text{Ec. (67)}$$

$$R_2' (a_2', b_2', c_2') \quad \text{Ec. (68);} \quad Dy (0, Dy, 0) \quad \text{Ec. (69)}$$

De lo que se obtiene:

$$\Delta a1 + a2 = a2' \quad \text{Ec. (70)}$$

$$\Delta b1 + b2 + Dy = b2' \quad \text{Ec. (71)}$$

$$\Delta c1 + c2 = c2' \quad \text{Ec. (72)}$$

$$\sqrt{(a2)^2 + (b2)^2 + (c2)^2} = \sqrt{(a2')^2 + (b2')^2 + (c2')^2} \quad \text{Ec. (73)}$$

$$b2' = \sqrt{(a2)^2 + (b2)^2 + (c2)^2 - (a2')^2 - (c2')^2} \quad \text{Ec. (74)}$$

Conocidos los valores de b2 y b2', se obtiene el valor de Δb2, el cual está dado por:

$$\Delta b2 = b2 - b2' \quad \text{Ec. (75)}$$

*Cálculo del número de dientes del piñón*

Para obtener el número de dientes del piñón, se toman en cuenta las siguientes ecuaciones: (Budynas y Nisbett, 2008).

$$S = \frac{dp}{2} * \theta_{sw} \quad \text{Ec. (76);} \quad dp = 2 \frac{S}{\theta_{sw}} \quad \text{Ec. (77)}$$

$$m = \frac{dp}{N} \quad \text{Ec. (78);} \quad N = \frac{dp}{m} \quad \text{Ec. (79)}$$

Donde:

S = desplazamiento de la cremallera

dp = diámetro de paso del piñón

θsw = giro del volante seleccionado

m = módulo del engrane

## Resultados y discusión

Se logra calcular el recorrido de la cremallera analizando los componentes como vectores y, tomando en cuenta que el mecanismo se encuentra en un espacio tridimensional, también fue utilizada la geometría de los ejes de giro para obtener un resultado más preciso, los ángulos Caster y Kingpin hacen más extenso el análisis.

Para el caso del sistema de dirección del vehículo Formula SAE PR15, se tienen los siguientes datos:

$$\text{Caster } \theta_{cs} = 4.89^\circ$$

$$\text{Kingpin } \theta_{kp} = 5^\circ$$

$$\delta i = 34^\circ$$

$$r = 76.47\text{mm}$$

$$Dcx = -16.26\text{mm}$$

$$Dcz = -56.85\text{mm}$$

$$Dg = 1123.47\text{mm}$$

$$Lc = 598.5$$

$$\text{wheelbase} = 1524$$

$$||R2|| = ||R2'|| = 243.5$$

Para los datos anteriores  $\theta_{ackermann} = 69.78^\circ$

**Obteniendo α1:**

$$\theta_1 \geq 45^\circ$$

$$\theta_2 = 20.22^\circ$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1} [\cos 20.22^\circ (\tan 4.89^\circ + \tan 20.22^\circ \tan 5^\circ)]$$

$$\alpha_1 = 6.3067^\circ$$

**Obteniendo α2:**

$$\theta_1 \leq 45^\circ$$

$$\theta_1 = 35.78$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1} [\cos 35.78^\circ (\tan 5^\circ + \tan 35.78^\circ \tan 4.89^\circ)]$$

$$\alpha_2 = 6.899^\circ$$

**Obteniendo los vectores de posición en coordenadas esféricas:**

$$R1 (76.47, 69.78^\circ, 96.3067^\circ)$$

$$R1' (76.47, 35.78^\circ, 96.899^\circ)$$

**Convirtiendo a coordenadas rectangulares:**

$$R1 (71.3232, 26.2701, -8.3994)$$

$$R1' (44.3863, 61.5885, -9.1855)$$

**Por lo tanto:**

$$\Delta b1 = 26.2701 - 61.5885 = -35.3184$$

$$\Delta R1 (26.9368, -35.3184, 0.7861)$$

$$R2 (-16.26, 236.21, -56.85)$$

### Para obtener R2'

$$26.9368 + (-16.26) = a2' = 10.6768$$

$$0.7861 + (-56.85) = c2' = -56.0639$$

$$b2' = ((-16.26)^2 + (236.21)^2 + (-56.85)^2 - (10.6768)^2 - (-56.0639)^2)^{1/2} = 236.716$$

$$\text{Por lo tanto: } \Delta b2 = 236.21 - 236.716 = -0.506$$

### Obteniendo el desplazamiento de la cremallera

$$\Delta b1 + \Delta b2 = -35.3184 + (-0.506) = -35.8244$$

$$\text{Desplazamiento de la cremallera} = \mathbf{35.8244}$$

$N$  = número de dientes del engrane

### Si se tienen los siguientes datos:

$$m = 1.5$$

$$s = 35.8244 \text{ mm}$$

$$\theta_{sw} = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

### Aplicando el procedimiento para calcular N

$$dp = 2 * 35.8244 * \frac{2}{\pi} = 45.613$$

$$N = \frac{45.613}{1.5} = 30.4087; N \approx \mathbf{31 \text{ dientes}}$$

El número de dientes del piñón siempre se tendrá que redondear, por lo que es posible que si se desprecian dichos ángulos se llegue a un resultado igual. No obstante, en análisis similares podrán ser utilizados para realizar otros cálculos en el vehículo, como la medida de la desalineación de las llantas al actuar la suspensión, también conocido como *roll steer*.

Redondeando N, el giro del volante cambia a:

$$dp = 1.5 * 31 = 46.5 \text{ mm}$$

$$\theta_{sw} = 2 * \frac{35.8244}{46.5} = 1.54083 = 88.2833^\circ$$

## Conclusiones

El procedimiento al que se llegó para calcular el desplazamiento de la cremallera permite, de manera rápida, realizar iteraciones al diseñar el sistema de dirección con este tipo de análisis vectorial.

En este procedimiento se concluyó que el desplazamiento de la cremallera equivale a:  $\Delta b1 + \Delta b2 = Dy$


Lo cual es la sumatoria de la diferencia entre los vectores de posición inicial y final de los brazos de dirección y de los tirantes.

Se pueden realizar pruebas para diferentes diseños de geometrías en el sistema simplemente con cambiar los datos a los cuales está sujeto el procedimiento descrito en este artículo.

El procedimiento para obtener  $\Delta b1$ , podría simplificarse, utilizando un modelo matemático de la trayectoria en lugar del análisis realizado para la obtención del ángulo  $\alpha$ .

Todo este procedimiento está diseñado para que pudiera ser ingresado en un software matemático en caso de que se quiera hacer más realizar con mayor rapidez y por consecuencia más eficiente el proceso de iterar en la geometría de la dirección, en este software únicamente se introducirían las constantes que son  $Dcx$ ,  $Dcy$ ,  $Dg$ ,  $Lc$ , ángulo Caster, ángulo Kingpin,  $\sigma$ ,  $r$ , *wheelbase*, ángulo Ackermann y R2.

## Literatura citada

- Society of Automotive Engineers. 2016. 2017-2018 Formula SAE Rules (9.2.16a.). Warrendale, PA, Estados Unidos: Society of Automotive Engineers, Inc.
- Milliken, W. F. and D. L. Milliken. 1995. Race Car Vehicle Dynamics. 1era ed. Warrendale, PA, Estados Unidos. Society of Automotive Engineers, Inc. 710-716 p.
- Gillespie, T. D. 1992. Fundamentals of Vehicle Dynamics. 1era ed. Warrendale, PA, Estados Unidos. Society of Automotive Engineers, Inc. 276 p.
- Larson, R. y B. H. Edwards. 2010. Cálculo 2 de varias variables. 9na ed. Distrito Federal, Mexico: Mc Graw Hill. 825 p.
- Budynas, R. G. y J. K. Nisbett. 2008. Diseño en ingeniería mecánica de Shigley. 8va ed. Distrito Federal, México: Mc Graw Hill. 656 p. 

Este artículo es citado así:

Moya-Quevedo, M. A., F. Rosas-Pérez, I. De Luna-Zamora, R. A. Salas-Motis, A. G. Franco-Díaz y G. Rosas Pérez. 2019. Diseño, modelado y construcción de la dirección de un vehículo tipo SAE mediante análisis vectoriales y geométricos. *TECNOCENCIA Chihuahua* 13(2):99-111.

## Resumen curricular del autor y coautores

**MARCO AURELIO MOYA QUEVEDO.** Inició sus estudios en la carrera de Ingeniería Electromecánica en 2014, es miembro estudiantil de la Sociedad de Ingenieros Automotrices (SAE). Ingresó al club SAE del Tecnológico Nacional de México/ Instituto Tecnológico de Chihuahua en el año 2016, donde fue líder del área de dirección del prototipo automotriz Formula SAE #17. En el 2017 dirige las áreas de suspensión y dirección de Formula SAE. En el 2018 ingresó a los proyectos Baja y Formula SAE fungiendo como líder de Suspensión en Baja SAE y dirección y suspensión en Formula SAE, donde se obtiene un primer lugar en la categoría de costo del prototipo. Terminó sus residencias profesionales en el año 2019 en la empresa de automatización Valmak donde es contratado como diseñador mecánico.

**FRANCISCO ROSAS PÉREZ.** Terminó sus estudios de Ingeniería en 2001, obteniendo el título de Ingeniero Mecánico Industrial por el Instituto Tecnológico de Chihuahua (ITCH). En 2007 realizó su posgrado en el Instituto Tecnológico de estudios superiores de Monterrey, donde obtuvo el grado de Maestro en Ingeniería en Sistemas de Calidad y Productividad. Desde el 2011 labora en el Tecnológico Nacional de México/ Instituto Tecnológico de Chihuahua y posee la categoría de Académico titular C. Es profesor con Perfil deseable acreditado por la Subsecretaría de Educación Superior, desde agosto de 2018. Desde el año 2017 es jefe del proyecto de Investigación "Baja SAE" en el Tec NM/ ITCH. Su área de especialización es la Hidráulica y la Neumática. Ha dirigido la construcción de 6 prototipos de vehículos todo terreno Baja-SAE participando en competencias Internacionales Universitarias desde el año 2012 a la fecha, todas ellas llevadas a cabo en Estados Unidos. Ha participado en dos proyectos de Investigación financiados por el Tecnológico Nacional de México.

**IGNACIO DE LUNA ZAMORA.** Terminó su licenciatura en 1992, año en que le fue otorgado el título de Ingeniero Electromecánico en el Instituto Tecnológico de Delicias. Realizó su posgrado en Chihuahua, donde obtuvo el grado de Maestro en Dirección y Gestión Empresarial en la Universidad Vizcaya de Las Américas. Desde febrero del año 2000 labora en el Tecnológico Nacional de México/ Instituto Tecnológico de Chihuahua como Docente y posee la categoría de Profesor titular C. Es Profesor con Perfil Deseable acreditado por la Subsecretaría de Educación Superior, desde agosto del 2018. Desde el año 2017 es Jefe del Proyecto de Investigación Formula SAE en el TecNM/ITCH. Su área de especialización es en el campo de HVAC y Máquinas Hidráulicas. Ha dirigido la construcción de 4 prototipos de vehículos tipo Formula SAE participando en competencias internacionales universitarias desde el año 2015 a la fecha, todas ellas llevadas a cabo en Estados Unidos. Ha participado en 2 proyectos de investigación financiados por el Tecnológico Nacional de México.

**RAÚL ARMANDO SALAS MOTIS.** Terminó sus estudios de ingeniería en 1992, obteniendo el título de Ingeniero Mecánico Industrial por el Instituto Tecnológico de Chihuahua (ITCH). Realizó su posgrado en el Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), donde obtuvo el grado de Maestro en Ingeniería en Sistemas de Calidad y Productividad en el 2008. Desde el 2009 labora en el Instituto Tecnológico de Chihuahua como Profesor de Tiempo Completo. En el 2018 obtiene el reconocimiento como Perfil Deseable por la Subsecretaría de Educación Superior, y se desempeña como Jefe de Proceso de Acreditación de Ingeniería Electromecánica ante CACEI. Actualmente se desempeña como Jefe de Laboratorio de Manufactura y como docente en la cátedra de Mecanizado por Control Numérico en el Tecnológico Nacional de México.

**ANA GABRIELA FRANCO DÍAZ.** Terminó su licenciatura en 1991 obteniendo con mención honorífica el título de Contador Público por la Facultad de Contaduría y Administración de la Universidad Autónoma de Chihuahua (UACH). Realizó su posgrado en la UACH obteniendo el grado de Maestro en Administración en 2007. Su experiencia docente en el Instituto Tecnológico de Delicias impartiendo materias del área de Ciencias Económico Administrativas desde 2009 a la fecha contando con una plaza de 19 hrs. Asesor de residencias profesionales dentro del propio ITD. Dentro del sector privado ocupó puestos gerenciales en el área Financiera y Administrativa. En el año 2001 participó como auditor interno en Bristol Myers Squibb corporativo de la comunidad europea en Chester Inglaterra. Tiene experiencia en el sector público Como Directora del DIF municipal en Cd. Delicias, Chih., en el período comprendido entre 2004-2008. Dentro del mismo municipio como Oficial Mayor durante 2008-2010.

**GILDARDO ROSAS PÉREZ.** Terminó sus estudios de Ingeniería en 2004, obteniendo el título de Ingeniero Mecánico Industrial por el Instituto Tecnológico de Chihuahua (ITCH). Realizó su posgrado en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, donde obtuvo el grado de Maestro en Ingeniería en Sistemas de calidad y productividad. Desde el 2004 labora en el mismo Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey desempeñándose en diferentes puestos, del 2005 al 2007 como ejecutivo del departamento de escolar, del 2007 al 2009 como director de preparatoria de la Universidad TecMilenio Campus Cuauhtémoc, del 2009 al 2012 como director académico en la universidad TecMilenio Campus Juárez, del 2012 al 2014 Director de carrera de Ingeniería Industrial y de sistemas en el Instituto Tecnológico y de estudios Superiores de Monterrey campus Aguascalientes, del 2014 a la fecha se desempeña como Director de carrera Ingeniería Mecánica en el Instituto Tecnológico y de estudios Superiores de Monterrey Campus Chihuahua.